## Rayon de convergence

**Exercice 1 - Vrai/faux/exemples** - *L2/Math Spé* - $\star$

1. La série entière $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{\pi^n}$ convient.
2. Si $a_n=\frac{1}{n+1}$ et $b_n=1$, les deux séries ont même rayon de convergence (égale à 1), et pourtant $a_n=o(b_n)$.
3. C'est le même ! on a $|a_n\rho^n|=|(-1)^n a_n\rho^n|$ pour tout $\rho\geq 0$, et donc, par définition du rayon de convergence, les deux séries ont même rayon de convergence.

**Exercice 2 - Rayon de convergence** - *L2/Math Spé* - $\star$

1. Posons $a_n=\frac{n!}{(2n)!}$. Alors
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4n+2}\to 0.$$
D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $+\infty$.
2. On sait que $(\ln nR^n)$ est borné si et seulement $|R|<1$. Ainsi, le rayon de convergence vaut 1.
3. Pour $R>0$, on a
$$\frac{\sqrt{n}R^{2n}}{2^n+1}\sim_{+\infty}\sqrt{n}\left(\frac{R^2}{2}\right)^n.$$
Ceci est borné si et seulement si $\frac{R^2}{2}<1$. Le rayon de convergence est donc $\sqrt{2}$.
4. Posons $u_n=\frac{(1+i)^n z^{3n}}{n.2^n}$. Alors
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n|1+i||z|^3}{2(n+1)}\to\frac{\sqrt{2}|z|^3}{2}=\frac{|z|^3}{\sqrt{2}}.$$
Ainsi, si $|z|^3<\sqrt{2}$, la série de terme général $|u_n|$ est convergente d'après le critère de d'Alembert, alors qu'elle est divergente si $|z|^3>\sqrt{2}$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est $\sqrt[6]{2}$.
5. On remarque que
$$(n-2)|z|^n\leq|2+ni||z^n|\leq(2+n)|z|^n.$$
Ainsi, la série converge pour $|z|>1$ et diverge pour $|z|<1$. Son rayon de convergence est donc 1.
6. Notant $u_n=\frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}z^n$, on applique la règle de d'Alembert pour étudier la convergence absolue de cette série. On a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{|z|}{2n+1}\to 0.$$
La série entière est donc convergente pour toute valeur de $z$. Son rayon de convergence est donc $+\infty$.

7. On applique à nouveau la règle de d'Alembert à $u_n = a^{\sqrt{n}}|z|^n$. On obtient
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$
Or,
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}((1+1/n)^{1/2} - 1) = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 0.$$
Ainsi, on obtient que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to |z|a^0 = |z|.$$
On en déduit que la série des modules converge absolument pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. Le rayon de convergence de la série entière est donc 1.
8. Pour $|z| < 1$, on remarque que $|z|^{n!} \leq |z|^n$ et donc la série est convergente. Pour $|z| \geq 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série est donc grossièrement divergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est 1.
9. Pour $u_n = n^{\ln n}|z|^n$, on étudie la convergence en appliquant la règle de Cauchy :
$$\sqrt[n]{u_n} = n^{\ln n/n}|z| = \exp\left((\ln n \times \ln n)/n\right)|z| \to |z|.$$
La série est donc convergente pour $|z| < 1$ et divergente pour $|z| > 1$. Son rayon de convergence vaut 1.

**Exercice 3 - Rayon de convergence** - *L2/Math Spé* - $\star$

1. Une application immédiate de la règle de d'Alembert, ou une étude directe du comportement du terme général, donne que le rayon de convergence vaut 1.
2. En effectuant un développement limité, on trouve que $a_n \sim \frac{1}{n}$ d'où $|a_n z^n| \sim \frac{|z|^n}{n}$. La suite $(|a_n z^n|)$ est donc bornée si et seulement si $|z| \leq 1$. Le rayon de convergence de la série est 1.
3. On applique la règle de d'Alembert en remarquant que
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{4\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \to \frac{1}{8}.$$
Le rayon de convergence de la série est donc égal à 8.
4. $a_n$ ne prend que 7 valeurs distinctes, à savoir $\tan(k\pi/7)$ pour $k = 0, \dots, 6$. Soit $M$ un majorant de la valeur absolue de chacun de ces nombres. On a
$$|a_n z^n| \leq M|z|^n$$
ce qui prouve que le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à 1. De plus, pour $|z| \geq 1$, on a $|a_{7n+1}z^n| = \tan(\pi/7)|z|^n$ qui ne tend pas vers 0, et donc la série $\sum_n a_n z^n$ ne converge pas. On en déduit que le rayon de convergence recherché est exactement égal à 1.

5. Il suffit de remarquer que $1 \leq a_n \leq n$, ce qui entraine
$$|z|^n \leq |a_n z^n| \leq n|z|^n.$$
Ainsi, pour $|z| < 1$, la série $\sum_n a_n z^n$ converge, et pour $|z| > 1$, elle diverge. Son rayon de convergence est donc égal à 1.
6. On a $a_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$, donc $|a_n z^n| \sim \frac{|z|^n}{n}$ et la suite $(|a_n z^n|)$ est bornée si et seulement si $|z| < 1$. Le rayon de convergence de la série est donc égale à 1.

**Exercice 4 - Rayon de convergence et somme** - *L2/Math Spé* - $\star$

1. Posons $u_n = \frac{n+2}{n+1}$. Puisque $u_n \to 1$, la suite $|u_n z^n|$ est bornée si $|z| < 1$ et tend vers $+\infty$ si $|z| > 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à 1. Pour sommer la série entière, if suffit d'écrire
$$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$
ce qui donne
$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n &= \sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^n \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}.\end{aligned}$$
2. Posons $u_n = \frac{n^3}{n!}$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^3}{n^3} \to 0.$$
Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série étudiée est égal à $+\infty$. Pour la sommer, on va exprimer $n^3$ en fonction de $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$ et $n$ pour se ramener à des séries dérivées. On a en effet :
$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$
Utilisant que la dérivée de $\exp(x)$ est égale à $\exp(x)$, on trouve
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^{3n} = x^3 \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^{3n-3} = x^3 \exp(x).$$
De même, on a
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{n!} x^{3n} = x^2 \exp(x) \text{ et } \sum_{n\geq 0} \frac{n}{n!} x^{3n} = x \exp(x).$$
On conclut que
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n = (x^3 + 3x^2 + x) \exp(x).$$

**Exercice 5 - Division par n !** - *L2/Math Spé* - $\star$

Soit $0 < r < \rho$. Par le lemme d'Abel, on sait que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$|a_n r^n| \leq M.$$

Soit maintenant $R > 0$. Alors on a

$$\frac{|a_n|R^n}{n!} = |a_n|r^n \times \frac{(R/r)^n}{n!}.$$

Par croissance comparée des puissances et des polynômes, il existe $C > 0$ tel que $|(R/r)^n|/n! \leq C$. Il vient, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{|a_n|R^n}{n!} \leq MC.$$

La suite $(a_n R^n)$ est bornée pour tout $n$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$.

**Exercice 6 - Puissance** - *L2/Math Spé* - $\star$

Il suffit de remarquer que la suite $(a_n^\alpha r^n)$ est bornée si et seulement la suite $(a_n r^{n/\alpha})$ (obtenue en prenant la puissance $1/\alpha$ de la première) est bornée.. Ainsi, si $r < \rho^\alpha$, alors $r^{1/\alpha} < \rho$ et donc les suites $(a_n r^{n/\alpha})$ et $(a_n^\alpha r^n)$ sont bornées. De même, si $r > \rho^\alpha$, de sorte que $r^{1/\alpha} > \rho$, alors les suite $(a_n r^{n/alpha})$ et $(a_n^\alpha r^n)$ ne sont pas bornées. Ceci prouve que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$ est égal à $\rho^\alpha$.

**Exercice 7 - Comparaison** - *L2/Math Spé* - $\star\star$

1. Notons $R_1$ le rayon de convergence de $\sum_n a_n e^{\sqrt{n}} z^n$. Puisque $|a_n|e^{\sqrt{n}} \geq |a_n|$, on a $R_1 \leq R$. Soit maintenant $r > 0$ tel que $(a_n r^n)$ soit bornée. Alors, pour tout $\rho \in [0, r[$, on a

$$a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n = a_n r^n e^{\sqrt{n}} \frac{\rho^n}{r^n} = a_n r^n e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$$

   et comme $e^{n\ln(\rho/r)+\sqrt{n}}$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$, la suite $(a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n)$ est bornée. On en déduit que $R \leq R_1$ et donc finalement que $R = R_1$.
2. Il est clair que $(a_n r^{2n})$ est bornée si et seulement si $(a_n (r^2)^n)$ est bornée (c'est la même suite écrire de deux façons différentes). Le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{2n}$ est donc égal à $\sqrt{R}$.
3. Supposons d'abord $R > 0$ et $R < +\infty$. On va alors prouver que le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est égal à 1. En effet, soit $r$ tel que $(a_n r^n)$ est bornée. Alors, pour tout $\rho < 1$, on a $a_n \rho^{n^2} = a_n r^n \times \frac{\rho^{n^2}}{r^n}$ et cette quantité est bornée car $\frac{\rho^{n^2}}{r^n}$ tend vers 0 (on a choisi $\rho < 1$). Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est supérieur ou égal à 1. De façon similaire, on prouve que, si $r$ est tel que $a_n r^n$ n'est pas bornée, alors pour tout $\rho > 1$, on a $a_n \rho^{n^2}$ qui n'est pas borné. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est égal à 1.
   Lorsque $R = +\infty$, alors le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ sera élément de $[1, +\infty]$, mais toutes les valeurs peuvent être prises :
   - Si $a_n = 1/n!$, alors le rayon vaut 1.
   - Si $a_n = 1/n!^2$, alors le rayon vaut $+\infty$.

– Si $a_n = 1/\lambda^{n^2}$, avec $\lambda > 1$, le rayon de convergence vaut $\lambda$.
De même, si $R = 0$, alors le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ peut être n'importe quel réel dans $[0,1]$.

**Exercice 8 - Produit de Hadamard** - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Soit $0 \leq r < \rho_1\rho_2$. Alors il existe $r_1 < \rho_1$ et $r_2 < \rho_2$ tel que $r = r_1 r_2$. Les suites $(a_n r_1^n)$ et $(b_n r_2^n)$ sont bornées. Il en est de même de la suite $(a_n b_n r_1^n r_2^n)$, c'est-à-dire de la suite $(a_n b_n r^n)$. Comme ceci est vrai pour tout $r < \rho_1\rho_2$, le rayon de convergence recherché est au moins égal à $\rho_1\rho_2$. On n'a pas toujours égalité. En effet, si la première série est $\sum_n z^{2n}$ et la deuxième série est $\sum_n z^{2n+1}$, alors leur produit de Hadamard est la série nulle, qui est de rayon de convergence égal à $+\infty$, alors que dans ce cas $\rho_1\rho_2 = 1 \times 1 = 1$.

**Exercice 9 - Somme partielle** - *L2/Math Spé* - $\star\star$

1. Remarquons que $a_n = S_n - S_{n-1}$ et donc que $\sum_n a_n z^n = \sum_n S_n z^n - \sum_n S_{n-1} z^n$. Ainsi, $\sum_n a_n z^n$ est la différence de deux séries entières de rayon de convergence $R$, son rayon de convergence $\rho$ vérifie $\rho \geq R$.
2. La série $\sum_n S_n z^n$ est le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n z^n$. Ces deux séries ont pour rayon de convergence respectif $\rho$ et 1. On en déduit que le rayon de convergence $R$ de la série $\sum_n S_n z^n$ vérifie $R \geq \inf(1,\rho)$.

## Propriété de la somme

**Exercice 10 - Zéros, coefficients et produit** - *L2/Math Spé* - $\star\star$

1. Il suffit de remarquer que $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Donc si $f \equiv 0$, $f^n(0) = 0$ et $a_n = 0$ également.
2. On raisonne par contraposée et on suppose $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Soit $a_p$ le premier coefficient non-nul de $\sum_n a_n z^n$ et $b_q$ le premier coefficient non-nul de $\sum_n b_n z^n$. Alors $fg$ est aussi somme d'une série entière $\sum_n c_n z^n$ dans $D(0,R)$, où $c_n$ est donné par
$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$
Maintenant, étudions le coefficient $c_{p+q}$. On a
$$c_{p+q} = a_p b_q + \sum_{k=p+1}^{p+q} a_k b_{p+q-k} + \sum_{l=q+1}^{p+q} a_{p+q-l} b_l.$$
Ainsi, $c_{p+q} = a_p b_q \neq 0$. La série $\sum_n c_n z^n$ a au moins un coefficient non-nul, donc $fg \neq 0$ d'après la première question. On en déduit que si $fg = 0$, alors $f = 0$ et $g = 0$.

**Exercice 11 - Comportement au bord d'une série entière** - *L2/Math Spé* - $\star\star$

1. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a
$$|a_n| \leq (l+1)|b_n|.$$

Soit maintenant $r > 0$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|a_n|r^n \leq (l+1)|b_n|r^n$$

et donc, si la suite $(|b_n|r^n)$ est bornée, la suite $(|a_n|r^n)$ l'est aussi. On conclut en utilisant la définition du rayon de convergence. Le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ étant en effet donné par

$$R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n|r^n) \text{ est bornée }\}.$$

2. Fixons $N \geq 1$ tel que $\sum_{n=0}^N b_n \geq 2M$. Posons ensuite $P(x) = \sum_{n=0}^N b_n x^n$. On a $P(1) = 2M > M$. Le résultat demandé est alors une conséquence immédiate de la continuité de $P$ en 1.
3. Soit $M > 0$ et soient $N, \delta$ donnés par la question précédente. Alors, puisque $b_n$ est positif pour tout $n$, on a, pour chaque $x \in ]0,1[$,

$$g(x) \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n.$$

En particulier, pour tout $x \in ]1-\delta, 1[$, on a

$$g(x) \geq M.$$

Ceci prouve bien que $g$ tend vers $+\infty$ en 1.
4. On écrit simplement que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^N a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^N (a_n - b_n) x^n + \sum_{n=0}^N b_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

où on a posé $P(x) = \sum_{n=0}^N (a_n - b_n) x^n$ et $c_n = b_n$ si $n \leq N$, $c_n = a_n$ sinon.
5. On fixe $\varepsilon > 0$ et on décompose $f$ comme précédemment. D'une part, on a $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ et donc, multipliant par $x^n$ et sommant pour $n = 0, \dots, +\infty$, on déduit que

$$(l-\varepsilon)g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \leq (l+\varepsilon)g(x).$$

D'autre part, puisque $P$ est un polynôme, donc est continu en 1, et que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to 1$, on sait que

$$\frac{P(x)}{g(x)} \to 0 \text{ quand } x \to 1.$$

On en déduit l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in ]1-\delta, 1[$, on a

$$-\varepsilon \leq \frac{P(x)}{g(x)} \leq +\varepsilon.$$

Finalement, sommant toutes ces inégalités, on trouve que, pour tout $x \in ]1-\delta, 1[$, on a

$$l - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que $f/g$ tend vers l en 1.

**Exercice 12 - Comportement à l'infini** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

1. Puisque la suite $(a_n)$ est convergente, elle est bornée, disons par $M > 0$. Mais, par application du critère de d'Alembert, la série $\sum_n Mx^n/n!$ est convergente pour tout réel $x$. Le rayon de convergence de la série est donc égal à $+\infty$.
2. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que, pour $n \geq N$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$. On écrit alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{l}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + le^x. \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + \sum_{N}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n := f_1(x) + f_2(x).$$

Puisque $f_1$ est un polynôme, on a $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} f_1(x) = 0$. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour $x \geq x_0$,

$$e^{-x} |f_1(x)| \leq \varepsilon.$$

De plus, on a, pour $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} e^{-x} |f_2(x)| &\leq \sum_{N}^{+\infty} \frac{|a_n - l|}{n!} x^n \\ &\leq \sum_{N}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n \\ &\leq \sum_{0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n \\ &\leq \varepsilon e^{-x} e^x = \varepsilon. \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité triangulaire on trouve, pour tout $x \geq x_0$,

$$|e^{-x} f(x) - l| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, $e^{-x} f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 13 - Limite à l'infini** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. On remarque d'abord que la fonction se prolonge par continuité en 0. En effet, au voisinage de 0, on a
$$\frac{1-e^{-t^4}}{t^2}\sim\frac{-t^4}{t^2}=-t^2$$
et la fonction se prolonge par 0 en 0. Au voisinage de $+\infty$, la fonction est équivalente à $\frac{1}{t^2}$ qui est intégrable car 2>1. La fonction est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.
2. La fonction $t\mapsto\frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est développable en série entière en 0, de rayon de convergence $+\infty$, et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$\frac{1-e^{-t^4}}{t^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{4n-2}}{n!}.$$
Par intégration de cette série entière, on trouve
$$f(x)=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{4n-2}}{n!}dt=\int_0^x\frac{1-e^{-t^4}}{t^2}dt.$$
Ainsi, $f$ admet une limite en $+\infty$ égale à $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t^4}}{t^2}dt$.

**Exercice 14 - Formule de Cauchy et applications** - *L2/Math Spé* - $\star\star$

1. Puisque $r<R$, il résulte du lemme d'Abel que la série $\sum_n|a_n|r^n$ est convergente. Puisque $|a_nr^ne^{i(n-k)\theta}|=|a_n|r^n$ pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, on en déduit la convergence normale de la série demandée sur $[0,2\pi]$.
2. On a
$$f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}=\sum_n a_nr^ne^{i(n-k)\theta}.$$
Puisque la série converge normalement, donc uniformément sur $[0,2\pi]$, on peut inverser l'intégration et la sommation et on trouve
$$\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta=\sum_n a_nr^n\int_0^{2\pi}e^{i(n-k)\theta}d\theta.$$
La dernière intégrale est égale à 0 si $k\neq n$, et à $2\pi$ sinon. On en conclut que
$$\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta=2\pi a_kr^k.$$
3. Pour $k\geq 1$, on a
$$a_k=\frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta.$$
Soit $M>0$ tel que $|f(z)|\leq M$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Alors on a
$$|a_k|\leq\frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi}Md\theta=\frac{M}{r^k}.$$
Faisant tendre $r$ vers $+\infty$, on trouve $a_k=0$ pour $k\geq 1$, ce qui entraîne que $f$ est constante.

**Exercice 15 - Zéros** - *Oral ENS* - $\star\star\star$

On règle d'abord le cas où $f$ est identiquement nulle. Dans le cas contraire, prouvons d'abord que $A$ est fermé : si $(z_n)$ est une suite de zéros de $f$, et si $z_n \to z$, alors par continuité de $f$ en $z$ on a aussi $f(z) = 0$, et donc $z \in A$. En outre, $A$ est constitué uniquement de points isolés, c'est-à-dire que si $z_0 \in A$, il existe un voisinage $V$ de $z_0$ tel que $V \cap A = \varnothing$. En effet, puisque le rayon de convergence du développement en série entière de $f$ vaut $+\infty$, $f$ est aussi développable en série entière au voisinage de $z_0$. Ce développement s'écrit :

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots,$$

où on peut supposer $a_n \neq 0$ ($f$ est non identiquement nulle). On a alors :

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

où $g$ est une fonction continue vérifiant $g(z_0) = a_n \neq 0$. Par continuité, $g$, donc $f$, ne s'annule pas dans un voisinage de $z_0$, sauf en $z_0$.

## Développement en séries entières

**Exercice 16 - DSE en 0** - *L2/Math Spé* - $\star$

1. Il suffit de remplacer $t$ par $2x^2$ dans le développement en série entière de $\ln(1 + t)$. On a donc
$$\ln(1 + 2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^{2n}}{n}.$$
La série converge si $|2x^2| < 1$. Son rayon de convergence est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Il suffit de factoriser par $a$ au dénominateur et d'utiliser le développement en série entière de $\frac{1}{1-u}$. Il vient
$$\frac{1}{a - x} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{a}}.$$
Pour $|x/a| < 1 \iff |x| < |a|$, on obtient
$$\frac{1}{a - x} = \frac{1}{a} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$
Le rayon de convergence de la série obtenue est $|a|$.
3. On factorise par $a$ :
$$\ln(x + a) = \ln\big(a(1 + x/a)\big) = \ln(a) + \ln(1 + x/a).$$
Pour $|x/a| < 1$, soit $|x| < a$, on en déduit
$$\ln(x + a) = \ln(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n a^n}.$$
Le rayon de convergence de la série entière obtenue est $a$.

4. On réalise le produit de Cauchy des deux séries :
$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\textrm{ et }\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$
La deuxième série ayant pour rayon de convergence 1, on en déduit que pour $|x|<1$, on a
$$\frac{e^x}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\textrm{ avec }a_n=\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}.$$
La série converge pour $|x|<1$ (règle du produit de Cauchy), et comme $a_n\geq 1$, le rayon de convergence de la série obtenue est exactement égal à 1.
5. On a $1+x-2x^2=(1-x)(1+2x)$ donc la fonction est définie sur $I=]-1/2,1[$, et sur cet intervalle, elle s'écrit
$$\ln(1+x-2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1+2x).$$
En utilisant le développement en série entière de $\ln(1+u)$, on obtient
$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$
(valable pour $|x|<1$)
$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}$$
(valable pour $|x|<1/2$). En effectuant la somme, on en déduit que
$$\ln(1+x-2x^2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n.$$
La série obtenue est de rayon de convergence 1/2.
6. On factorise par 4 pour se ramener à $(1+t)^\alpha$. On a donc
$$(4+x^2)^{-3/2}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-3/2}.$$
La fonction $u\mapsto(1+u)^{-3/2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et
$$\forall u\in]-1,1[,\ (1+u)^{-3/2}=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{3.5.7.\dots.(2n+1)}{2.4.6.\dots.2n}u^n.$$
Il en résulte que pour tout $x$ tel que $\frac{x^2}{4}\in]-1,1[$, on a
$$\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-3/2}=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{3.5.7.\dots.(2n+1)}{2.4.6.\dots.2n}\frac{x^{2n}}{4^n}.$$
La série entière obtenue a pour rayon de convergence $]-2,2[$.

**Exercice 17 - DSE d'une fraction rationnelle** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On décompose $f$ en éléments simples. Puisque le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on sait qu'il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que

$$f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}+\frac{c}{2x-1}.$$

Si on multiplie les deux membres par $2x-1$ et qu'on fait $x=1/2$, on trouve $c=\frac{1/4+1/2-3}{9/4}=-1$. De même, multipliant par $(x-2)^2$, on trouve $b=1$. Pour trouver $a$, on peut procéder par identification et on obtient $a=1$. On développe en série entière chaque terme :

- Pour $x\neq 2$,
$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2-x}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-x/2}.$$
Donc, pour $|x|/2<1$, on a
$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{1}{2^{n+1}}x^n.$$
- Le troisième terme se traite de la même façon. Pour $|x|<1/2$, on a
$$\frac{-1}{2x-1}=\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{+\infty}2^nx^n.$$
- Pour le deuxième terme, il suffit de remarquer que $\frac{1}{(x-2)^2}$ est la dérivée de $\frac{-1}{x-2}$. Ayant déjà obtenu le développement en série entière de cette fraction rationnelle, il suffit de le dériver terme à terme. On obtient donc :
$$\frac{1}{(x-2)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}x^n.$$

On obtient donc que, pour tout $x\in]-1/2,1/2[$, on a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+2}}+2^n\right)x^n.$$

La série entière obtenue est de rayon de convergence $1/2$.

**Exercice 18 - Méthode de l'équation différentielle** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. On dérive deux fois $f$ :
$$\begin{aligned} f(t)&=\cos(\alpha\arcsin t)\\ f'(t)&=\frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}}\sin(\alpha\arcsin t)\\ f''(t)&=\frac{-\alpha^2}{1-t^2}\cos(\alpha\arcsin t)-\frac{\alpha t}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)}\sin(\alpha\arcsin t).\end{aligned}$$
On combine d'abord $f$ et $f''$ pour éliminer les termes en $\cos(\alpha\arcsin t)$ puis on ajoute les termes en $f'$ nécessaires pour éliminer les termes en $\sin(\alpha\arcsin t)$. Au final, on trouve que $f$ est solution de l'équation différentielle suivante :
$$(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y=0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t)=\sum_{n\geq 0}a_nt^n$ sur $]-R,R[$ vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. $y'$ est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n$ et $y''$ est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$. La fonction $t\mapsto (1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y$ est donc somme de la série entière
$$\sum_{n\geq 0}\left((n+1)(n+1)a_{n+2}+(-n(n-1)-n+\alpha^2)a_n\right)t^n.$$
Ceci doit être identiquement nul sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=(n^2-\alpha^2)a_n.$$
Puisque $a_0=1$ (car $y(0)=1$) et $a_1=y'(0)=0$, on en déduit que $a_{2p+1}=0$ pour tout $p$ et que
$$a_{2p}=\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right).$$
Réciproquement, la série entière
$$\sum_{p\geq 0}\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right)x^{2p}$$
a un rayon de convergence égal à 1 (on le vérifie facilement par la règle de d'Alembert) et est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.
3. L'équation différentielle $(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y=0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1-t^2\neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. $f$ et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, $f$ est développable en série entière, et
$$f(x)=\sum_{p\geq 0}\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right)x^{2p}.$$

**Exercice 19 - Méthode de l'équation différentielle** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. On dérive deux fois $f$ :
$$\begin{aligned}f(x)&=\exp(\lambda\arcsin x)\\ f'(x)&=\frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\exp(\lambda\arcsin t)\\ f''(x)&=\frac{\lambda x}{1-x^2}\exp(\lambda\arcsin x)+\frac{\lambda^2}{1-x^2}\exp(\lambda\arcsin x).\end{aligned}$$
On trouve que $f$ est solution de l'équation différentielle suivante :
$$(1-x^2)y''-xy'-\lambda^2y=0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ sur $]-R,R[$ vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$. $y'$ est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $y''$ est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. La fonction $t\mapsto(1-x^2)y''-xy'-\lambda^2 y$ est donc somme de la série entière
$$\sum_{n\geq 0}\left((n+1)(n+1)a_{n+2}+(-n(n-1)-n-\lambda^2)a_n\right)x^n.$$
Ceci doit être identiquement nul sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$a_{n+2}=\frac{n^2+\lambda^2}{(n+1)(n+2)}a_n.$$
De plus, $a_0=1$ (car $y(0)=1$) et $a_1=y'(0)=\lambda$. On trouve ainsi une unique suite $(a_n)$ solution. On peut calculer expliciter $a_n$, en distinguant les termes pairs et les termes impairs (le calcul est laissé au lecteur). Réciproquement, la suite $(a_n)$ précédente définit une série entière de rayon de convergence 1 d'après le critère de d'Alembert (puisque $a_{n+2}/a_n\to 1$). Cette série entière est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.
3. L'équation différentielle $(1-x^2)y''-xy'-\lambda^2y=0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1-x^2\neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$. $f$ et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, $f$ est développable en série entière, et $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$.

**Exercice 20 - Fonction définie par une intégrale** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Utilisant l'indication, on a
$$\begin{aligned}I_{2n}&=\frac{1}{(2i)^{2n}}\int_0^\pi (e^{ix}-e^{-ix})^{2n}dx\\&=\frac{(-1)^n}{4^n}\int_0^\pi\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}(e^{ix})^{2n-k}(e^{-ix})^k dx\\&=\frac{(-1)^n}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\int_0^\pi e^{(2n-2k)ix}dx.\end{aligned}$$
Or, cette dernière intégrale est nulle sauf si $n=k$, où elle vaut $\pi$. Il vient
$$I_{2n}=\frac{\pi\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

2. On sait, que pour tout $u \in ]-1,1[$, on a
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-u}} &= (1-u)^{-1/2}\\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\frac{-1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}-1\right)\times\dots\times\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(-1)\times(-3)\times\dots\times(-2n-1)}{2^n n!}u^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}u^n.\end{aligned}$$
3. D'après la question précédente, appliquée à $u = x^2\sin^2 \in ]-1,1[$, on a
$$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n}\sin^{2n}t.$$
On va permuter la limite et l'intégrale. Pour cela, on remarque que la série est uniformément convergente pour $t\in[0,\pi]$ (on travaille avec $x$ fixé). En effet, on a $|x\sin t|\leq |x|<1$, et on sait que la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}|x|^{2n}$ est convergente puisque le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-u}}$ a pour rayon de convergence 1. On peut donc inverser la limite et l'intégrale, et on trouve :
$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n}\int_0^\pi \sin^{2n}t dt\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{\pi}{16^n}\left(\binom{2n}{n}\right)^2 x^{2n}.\end{aligned}$$
La fonction $f$ est bien développable en série entière sur $]-1,1[$.

**Exercice 21 - Théorème de Bernstein** - *L3/Math Spé* - ⋆⋆

1. Il s'agit simplement de la formule de Taylor avec reste intégral, après changement de variables.
2. Tous les termes apparaissant dans la somme à droite de l'égalité sont positifs. On en déduit
$$0\leq \frac{\alpha^n}{n!}f^{(n)}(x)\leq f(x+\alpha).$$
D'autre part, par positivité de $f'$, $f$ est croissante et donc $f(x+\alpha)\leq f(2\alpha)$.
3. On revient à la formule de Taylor avec reste intégrale. De la question précédente, on sait que
$$\left|\alpha^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(x+\alpha u)}{n!}\right|\leq f(2\alpha)$$
pour tout $u\in[0,1]$ et tout $x\in[-\alpha,\alpha]$. On en déduit
$$\left|f(x+\alpha)-f(x)-\alpha f'(x)-\dots-\frac{\alpha^n}{n!}f^{(n)}(x)\right|\leq f(2\alpha)\int_0^1(1-u)^n du\leq \frac{f(2\alpha)}{n+1}.$$

Ceci tend vers 0, ce qui prouve le résultat voulu.

**Exercice 22** - **Une fonction non développable en série entière** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Posons $u_n(x) = e^{-n}e^{n^2ix}$. Alors $u_n$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 0$, on a
$$u_n^{(k)}(x) = (in^2)^k e^{-n}e^{n^2ix}.$$
Puisque $n^{2k}e^{-n} = O(n^{-2})$, il existe une constante $M > 0$ telle que
$$|u_n^{(k)}(x)| \leq Mn^{-2}.$$
La série (numérique) qui apparait à droite est convergente, on en déduit que la série des dérivées $k$-ièmes $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \geq 0$. Ainsi, $f = \sum_n u_n$ est de classe $C^\infty$.
2. D'après le calcul précédent, on a $|f^{(k)}(0)| = \sum_{n\geq 0} n^{2k}e^{-n} \geq k^{2k}e^{-k}$. Or, $k^k \geq k!$, et donc
$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \geq \frac{k^k}{k!}k^k e^{-k} \geq k^k e^{-k}.$$
3. Si la fonction était développable en série entière en 0, il existerait un intervalle non-vide $I$ centré en 0 tel que, pour tout $x \in I$, $f$ serait somme de sa série de Taylor en 0. Autrement dit, on aurait
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$
Mais pour $x \neq 0$, cette série ne converge pas car son terme général ne tend pas vers 0. En effet,
$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \geq k^k(x/e)^{-k} \to +\infty$$
(on peut aussi vérifier la non-convergence par le critère de d'Alembert). Ainsi, $f$ n'est pas développable en série entière en 0.

**Exercice 23** - **Fonction définie par une série** - *Math Spé/L3/Agreg interne* - ⋆⋆⋆

On utilise que $\frac{1}{x+n} = \int_0^1 t^{x+n-1}dx$. On a donc :
$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 t^{x+n-1}dx.$$
On va permuter la série et l'intégrale. Pour cela, on pose
$$f_N(t) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n t^{x+n-1}.$$
Alors :
- $f_N(t)$ converge simplement vers $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n t^{n-1}t^x = \frac{-t^x}{1+t} = f(t)$.
- $|f_N(t)| \leq t^x$ (car la somme partielle d'une série alternée est majorée par le premier terme), la fonction $t^x$ étant intégrable sur $]0,1[$ pour $|x| < 1$.

En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient donc :

$$u(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt.$$

On développe ensuite $t^x = \exp(\ln t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \frac{(\ln t)^n}{n!}$. On a donc :

$$u(x) = -\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} x^n\right) dt.$$

On permute, mais en sens contraire, l'intégrale et la série. Pour cela, on pose

$$g_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} x^n.$$

- $g_N$ converge simplement vers $\frac{t^x}{1+t}$.
- On a la majoration suivante :

$$\begin{array}{rcl} |g_N(t)| & \leq & \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{|\ln t|^n |x|^n}{n!(1+t)} \\ & \leq & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\ln t|^n |x|^n}{n!(1+t)} \\ & \leq & \displaystyle\frac{1}{1+t}\exp(|x||\ln t|) \\ & \leq & \displaystyle\frac{1}{(1+t)t^x} \end{array}$$

  et cette fonction est intégrable si $|x| < 1$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et permuter la série et l'intégrale :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} dt\right) x^n$$

expression valable pour $|x| < 1$. $u$ est donc développable en série entière au voisinage de 0.

**Exercice 24 - Inverse** - *L2/Math Spé* - $\star\star\star$

1. D'après la formule du produit de Cauchy, on a

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n = 1$$

   avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. La suite $(b_n)$ vérifie donc la relation de récurrence

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_0 & = & \frac{1}{a_0} \\ b_n & = & \frac{-1}{a_0}\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \end{array}\right.$$

2. Soit $R>0$ tel que $|a_n|\leq R^n$ pour $n\geq 1$, et on pose $C>0$ suffisamment grand pour que

$$\sum_{k\geq 1}\frac{R^k}{C^k}\leq |a_0|$$

   On va prouver par récurrence sur $n$ que $|b_n|\leq \frac{C^n}{|a_0|}$. C'est vrai au rang 0, et si c'est vrai jusqu'au rang $n-1$, alors

$$|b_n|\leq \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^n \frac{R^k}{C^k}\frac{C^n}{|a_0|}\leq \frac{C^n}{|a_0|}\times\frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{R^k}{C^k}\leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$

3. Soit $g(z)=\sum_{n\geq 0}b_nz^n$. Alors, par la formule sur le produit de Cauchy de deux séries entières et par définition de $(b_n)$, on a $f(z)g(z)=1$ dans un voisinage de 0. Autrement dit, $g=1/f$ dans un voisinage de 0. $1/f$ est donc développable en série entière en 0.

## Utilisation d'un développement en séries entières

**Exercice 25** - **Régularité** - *L2/Math Spé* - $\star$

1. Pour $x\neq 0$, on a, d'après le développement en série entière de sin,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

   Cette égalité est encore vraie en 0, puisque les deux membres sont alors égaux à 0. Ainsi, $f$ coïncide sur $\mathbb{R}$ avec une série entière de rayon de convergence $+\infty$. $f$ est donc de classe $C^\infty$.
2. Pour $x\geq 0$, on a

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}.$$

   Pour $x<0$, on a :

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(-1)^nx^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}.$$

   Ainsi, $g$ coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$ : elle est donc de classe $C^\infty$.
3. Pour $x\neq 0$, on a

$$h(x)=\frac{x-\sin x}{x\sin x}.$$

   On développe en série entière le numérateur et le dénominateur, en mettant en facteur le premier terme. On trouve

$$h(x)=\frac{x^2\times\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p+1}\frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}}{x^2\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p+1)!}}.$$

Posant $u(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p+1}\frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}$ et $v(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$, on voit que pour $x\neq 0$, $h(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$. Or, $u$ et $v$ sont de classe $C^\infty$ (ce sont des sommes de série entière), $v$ ne s'annule pas en 0, et de plus $u(0)/v(0)=0$. Ainsi, $h$ définit bien une fonction de classe $C^\infty$.

**Exercice 26 - Comparaison de deux fonctions** - *L2/Math Spé* - $\star$

Développons les deux fonctions en série entière. On a

$$\operatorname{ch}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\text{ et }e^{x^2/2}=\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k}}{2^k k!}.$$

Puisque $x^{2k}\geq 0$, le résultat sera démontré si on prouve que, pour tout $k\geq 0$, on a $(2k)!\geq 2^k k!$. C'est vrai pour $k=0$, et pour $k\geq 1$, on écrit simplement :

$$\frac{(2k)!}{2^k k!}=\frac{2k\times(2k-1)\times\cdots\times(k+1)}{2\times 2\times\cdots\times 2}.$$

Comme $k+1\geq 2$, $k+2\geq 2\dots$, on obtient bien le résultat voulu.

**Exercice 27 - Calcul de la somme d'une série** - *L2/Math Spé* - $\star$

1. Posons $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$. Alors $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{n(2n+1)x^2}{(n+1)(2n+3)}\to|x|^2$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série entière est convergente pour $|x|<1$ et divergente pour $|x|>1$. Son rayon de convergence est donc 1. De plus, pour $x=1$, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ est (absolument) convergente (on peut aussi prouver qu'elle converge d'après le critère des séries alternées). De même, pour $x=-1$, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{-1}{n(2n+1)}$ est convergente. $f$ est donc définie sur $[-1,1]$.
2. La théorie des séries entières nous dit que $f$ est continue sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire sur $]-1,1[$. Pour prouver la continuité sur $[-1,1]$, on va prouver qu'il y a convergence normale sur tout l'intervalle $[-1,1]$. En effet, pour tout $x\in[-1,1]$, on a
$$\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}\right|\leq\frac{1}{n(2n+1)}$$
et le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (insistons sur le fait qu'il ne dépend pas de $x$). La série est donc normalement convergente sur $[-1,1]$. Comme chaque fonction $x\mapsto\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}$ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit que $f$ est continue sur $[-1,1]$.
3. La série dérivée est, pour $|x|<1$,
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}=\ln(1+x^2).$$
En effet, pour $x\in]-1,1[$, on a $0\leq x^2<1$ et on est bien dans le domaine de validité du développement en série entière de $\ln(1+u)$. Puisque $f(0)=0$, on en déduit $f(x)=$

$\int_0^x \ln(1+t^2)dt$. On calcule cette intégrale en effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x 1\times\ln(1+t^2)dt \\ &= \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\left[t-\arctan(t)\right]_0^x \\ &= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x. \end{aligned}$$

4. L'égalité $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$ n'est valable que pour $x \in ]-1,1[$. Mais le membre de droite comme celui de gauche sont continus en 1. Par continuité, l'égalité précédente reste vraie sur $[0,1]$ tout entier. On conclut que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = f(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

**Exercice 28 - Calcul de la somme d'une série** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. (a) Il est facile de vérifier que $1+j+j^2 = 0$, que $1+j^2+j^4 = 0$ et que $j^3 = 1$. On en déduit que
$$1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^r + j^{2r}$$
où $r$ est le reste de $k$ modulo 3. On en déduit que $1 + j^k + j^{2k} = 0$ sauf si $k$ est multiple de 3. Dans ce cas, la somme vaut 3. Il vient alors
$$e^x + e^{jx} + e^{j^2x} = \sum_{k\geq 0} \frac{1+j^k+j^{2k}}{k!}x^k = 3\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

   (b) Écrivant
$$e^{jx} = exp\big((-1+i\sqrt{3})x/2\big) = e^{-x/2}\big(\cos(x\sqrt{3}/2) + i\sin(x\sqrt{3}/2)\big)$$
et
$$e^{j^2x} = \exp\big((-1-i\sqrt{3})x/2\big) = e^{-x/2}\big(\cos(x\sqrt{3}/2) - i\sin(x\sqrt{3}/2)\big)$$
on en déduit
$$S(x) = \frac{e^x + 2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}.$$
La somme recherchée est donc
$$S(1) = \frac{e + 2e^{-1/2}\cos(\sqrt{3}/2)}{3}.$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}\\ S''(x) &= \sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}\\ S^{(3)}(x) &= \sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!}=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=S(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $S$ est solution de l'équation $y^{(3)}-y=0$.

(b) L'équation précédente est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^3-1=0$, qui admet pour racines $1,j,j^2$. Toute solution s'écrit donc $y(x)=ae^x+be^{jx}+ce^{j^2x}$.

(c) $S$ est la solution de l'équation différentielle précédente vérifiant $S(0)=1$, $S'(0)=S''(0)=0$. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 1\\ a+bj+cj^2 &=& 0\\ a+bj^2+cj &=& 0 \end{array}\right.$$

d'où on tire $a=b=c=1/3$. On a donc

$$S(x)=\frac13\left(e^x+e^{jx}+e^{j^2x}\right)=\frac{e^x}{3}+\frac23 e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$$

**Exercice 29 - Une suite récurrente** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. On introduit la série entière $f(x)=\sum_{n\geq 0}u_nx^n$. Supposons que son rayon de convergence soit $r>0$. Alors, faisant le produit de Cauchy des deux séries, on a, pour tout $x\in]-r,r[$,

$$f^2(x)=\sum_{n\geq 0}v_nx^n \text{ avec } v_n=\sum_{k=0}^n u_ku_{n-k}=u_{n+1}.$$

Autrement dit, on a

$$f^2(x)=\sum_{n\geq 0}u_{n+1}x^n=\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$

Pour chaque $x\in]-r,r[$, $f(x)$ vérifie donc l'équation

$$xf^2(x)-f(x)+1=0.$$

2. Il en résulte que, pour chaque $x\in]-r,r[$, on doit avoir

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ ou } f(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Or, $f$ doit être continue en 0 avec $f(0)=1$. S'il existe une suite $(x_n)$ tendant vers 0 pour laquelle $f(x_n)=\frac{1+\sqrt{1-4x_n}}{2x_n}$, alors $|f(x_n)|\to+\infty$, ce qui est contradictoire. Donc il existe $\rho>0$ tel que

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\text{ pour tout }x\in]-\rho,\rho[.$$

3. Réciproquement, soit $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$. On va prouver que $f$ est développable en série entière au voisinage de 0. En effet, pour tout $x\in]-1/4,1/4[$, on a

$$\sqrt{1-4x}=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\frac{x^n}{n!}.$$

On en déduit que, pour tout $x\in]-1/4,1/4[$, on a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n.$$

Puisque $f$ vérifie $xf^2(x)-f(x)+1=0$, le calcul effectué à la première question (ie le développement en série entière de $xf^2-f+1$) prouve que, en posant $a_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, $a_0=1$ et $a_{n+1}=\sum_{k=0}^n a_ka_{n-k}$. On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$u_n=a_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

**Exercice 30 - Une égalité intégrale/séries** - *Math Spé* - ⋆⋆

Remarquons d'abord que l'intégrale est bien définie. En effet, la fonction peut être prolongée par continuité en 0 et en 1. Par exemple, en 0, $\ln(x)\ln(1-x)\sim_0 -x\ln(x)$ et cette dernière fonction tend vers 0 quand $x$ tend vers 0. D'autre part, on a

$$\int_0^1\ln(x)\ln(1-x)dx=\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{x^n}{n}\ln(x)dx.$$

On pose $f_N(x)=\sum_{n=1}^N-\frac{x^n}{n}\ln x$. Alors $f_N$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $\ln(x)\ln(1-x)$. D'autre part, $f_N\leq f_{N+1}$. Par le théorème de convergence monotone, on obtient

$$\int_0^1\ln(x)\ln(1-x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1-\frac{x^n}{n}\ln x dx.$$

On calcule cette dernière intégrale très facilement en intégrant par parties.

**Exercice 31 - Nombre de dérangements** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Puisque $\{1,2,3\}$ a trois éléments, il existe exactement 6 bijections différentes de $\{1,2,3\}$ dans lui-même :
   - l'identité ;
   - les 3 transpositions (1 2), (1 3), (2 3).
   - les 2 cycles (1 2 3) et (1 3 2).

L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas. On en déduit que
$$D_{3,0}=1,\ D_{3,1}=3,\ D_{3,2}=0 \text{ et } D_{3,3}=1.$$

2. Si on note $A_k$ l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ ayant $k$ point fixes, alors la famille $A_0,\dots,A_n$ forme une partition de l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$. Ainsi, on a bien $n!=\sum_{k=0}^n \mathrm{card}(A_k)=\sum_{k=0}^n D_{n,k}$.
3. Pour chaque permutation ayant $k$ points fixes, il y a
   – $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces $k$ points fixes (choisir $k$ éléments parmi $n$) ;
   – ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n-k$ éléments restants. Il y a $D_{n-k,0}$ telles permutations.

   Le nombre de permutations ayant $k$ points fixes vaut donc $\binom{n}{k}D_{n-k,0}$.
4. Clairement, on a $0\leq d_n\leq n!$, soit $\frac{|d_n||z|^n}{n!}\leq |z|^n$. La série converge absolument si $|z|<1$, son rayon de convergence est au moins égal à 1.
5. Puisque les séries entières définissant $\exp x$ et $f(x)$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour $|x|<1$. De plus, on a
$$(\exp x)f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n \text{ avec } b_n=\sum_{k=0}^n\frac{d_{n-k}}{(n-k)!}\times\frac{1}{n!}.$$
   Mais
$$\sum_{k=0}^n\frac{d_k}{k!}\times\frac{1}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}d_{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n D_{n,k}=1.$$
   On obtient
$$(\exp x)f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$
6. De l'égalité $(\exp x)f(x)=\frac{1}{1-x}$, on tire
$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$
   On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n \text{ avec } c_n=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}.$$
   Par identification, on obtient bien $d_n=n!\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}$.
7. La probabilité recherchée est $p_n=d_n/n!=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}$. Utilisant le développement en série entière de $\exp(-x)$, on trouve que cette probabilité converge vers $\exp(-1)=1/e$.

**Exercice 32 - Une équation différentielle détaillée** - *L2/Math Spé* - ⋆

1. Soit $r>0$ le rayon de convergence de $f$. On a, pour tout $x\in]-r,r[$,

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & \sum_{n\geq 0} a_n x^n\\
xf'(x) & = & x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n\\
f''(x) & = & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.
\end{array}$$

On en déduit que, pour tout $x\in]-r,r[$, on a

$$f''(x)+xf'(x)+f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n$$

avec

$$b_n=(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n.$$

Or, $f''+xf'+f=1$. Par unicité du développement en série entière, on obtient $b_0=1$ et $b_n=0$ pour tout $n\geq 1$. Ceci nous donne les relations

$$a_2=(1-a_0)\text{ et }a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2}\text{ pour }n\geq 1.$$

2. On sait en outre que $a_0=y(0)=0$ et que $a_1=y'(0)=0$. On en déduit que tous les termes impairs $a_{2n+1}$ sont nuls, puis que, pour les termes pairs

$$\begin{array}{rcl}
a_{2n} & = & \left(\frac{-1}{2n}\right)\times\left(\frac{-1}{2n-2}\right)\times\dots\times\left(\frac{-1}{4}\right)a_2\\
 & = & \frac{(-1)^{n+1}}{2\times 4\times\dots\times 2n}.
\end{array}$$

On factorise tous les termes qui sont pairs au dénominateur, et on trouve

$$a_{2n}=\frac{(-1)^{n+1}}{2^nn!}$$

valable pour $n\geq 1$. Réciproquement, posons

$$f(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2^nn!}x^{2n}.$$

La série entière qui apparait est de rayon de convergence égal à $+\infty$, la fonction $f$ ainsi définie est donc de classe $C^\infty$ et, remontant les calculs, elle est solution de l'équation différentielle initiale.

3. De plus, on peut l'identifier à une fonction classique. En effet,

$$f(x)=-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n=1-\exp(x^2/2).$$

**Exercice 33 - Solutions développables en série entière d'une équation différentielle** - *L2/Math Spé* - ⋆

On procède par analyse-synthèse. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$. On introduit ce développement dans l'équation :

$$x^2(1-x)\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(1+x)\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

pour tout $x \in ]-R, R[$, soit encore

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 1} na_n x^n - \sum_{n\geq 1} na_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$$

On réindexe les deuxième et quatrième somme de sorte d'obtenir à l'intérieur le terme $x^n$ :

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 3}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 1} na_n x^n - \sum_{n\geq 2}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

ceci étant identiquement nul sur $]-R, R[$. Sachant qu'une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on peut identifier. Le terme en $x^0$ donne $a_0 = 0$, celui en $x^1$ donne $0 = 0$, celui en $x^2$ donne $2a_2 - 2a_2 - a_1 + a_2 = 0$, soit $a_2 = a_1$. Pour $n \geq 3$, , on obtient

$$\big(n(n-1) - n + 1\big)a_n + \big(-(n-1)(n-2) - (n-1)\big)a_{n-1} = 0$$

i.e. $a_n = a_{n-1}$ pour tout $n \geq 3$. Toute solution développable en série entière s'écrit donc :

$$y(x) = a\sum_{n\geq 1} x^n = \frac{ax}{1-x},\ a \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement (c'est la partie synthèse du raisonnement), on vérifie aisément, en les introduisant dans l'équation différentielle, que les fonctions $x \mapsto \frac{ax}{1-x}$ sont solution de l'équation.
Une fois cette solution trouvée, on peut alors résoudre complètement l'équation différentielle en utilisant la méthode d'abaissement de l'ordre.

**Exercice 34 - Toutes les solutions** - *L2/Math Spé* - ⋆

1. Il faut étudier quelles conditions il faut mettre sur $a$, $b$, $c$ et $d$ pour que ceci définisse une solution de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$. La continuité de $f$ en 0 entraîne que $a = c$ puisque

   $$a = \lim_{x\to 0^+} y(x) \text{ et } c = \lim_{x\to 0^-} y(x).$$

   De plus, on a

   $$f'(x) = -2ax\sin(x^2) + 2bx\cos(x^2) \text{ si } x > 0.$$

   $$f''(x) = -2a\sin(x^2) - 4ax^2\cos(x^2) + 2b\cos(x^2) - 4bx^2\sin(x^2) \text{ si } x > 0.$$

   De même, on a

   $$f''(x) = -2a\sin(x^2) - 4ax^2\cos(x^2) + 2d\cos(x^2) - 4dx^2\sin(x^2) \text{ si } x < 0.$$

   Remarquons que

   $$b = \lim_{x\to 0^+} f''(x) \text{ et } d = \lim_{x\to 0^-} y''(x).$$

   Pour que $f''$ soit continue en 0, il est nécessaire que $b = d$. Réciproquement la fonction $x \mapsto a\cos(x^2) + b\sin(x^2)$ définit bien une fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $y(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ une série entière solution de $(E)$ de rayon de convergence $R>0$. On introduit ce développement en série entière dans $(E)$. Après dérivation terme à terme de la série, et réindexation des séries, on obtient :

$$xy''-y'+4x^3y=-a_1+3a_3x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}\left(a_{n+1}(n-1)(n+1)+4a_{n-3}\right)x^n=0$$

pour tout $x\in]-R,R[$. L'unicité du développement en série entière entraîne que $a_1=a_3=0$, tandis que, pour tout $n\geq 3$,

$$a_{n+1}=-\frac{4}{(n-1)(n+1)}a_{n-3}.$$

En réindexant, on trouve, pour tout $n\geq 0$,

$$a_{n+4}=-\frac{4}{(n+2)(n+4)}a_n.$$

3. D'après la relation de récurrence précédente, et puisque $a_1$ et $a_3$ sont nuls, on trouve que $a_{4p+1}=0$ et $a_{4p+3}=0$ pour tout $p\geq 0$.
4. La relation de récurrence nous dit que

$$a_{4p}=-\frac{4}{(4p)(4p-2)}a_{4(p-1)}=\frac{-1}{2p(2p-1)}a_{4(p-1)}.$$

On prouve alors aisément par récurrence que

$$a_{4p}=\frac{(-1)^p}{(2p)!}a_0.$$

De même, on obtient

$$a_{4p+2}=\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}a_2.$$

5. En appliquant la règle de d'Alembert, ou en remarquant que $\frac{R^p}{(2p)!}$ tend vers 0 lorsque $p$ tend vers l'infini, pour tout $R\in\mathbb{R}$, on obtient que la série entière obtenue a pour rayon de convergence $+\infty$. De plus, on a

$$\begin{aligned}y(x)&=a_0\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{4p}+a_2\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{4p+2}\\&=a_0\cos(x^2)+a_2\sin(x^2).\end{aligned}$$

6. Puisque la série entière obtenue a pour rayon de convergence $+\infty$, sa somme est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$. De plus, sur chaque intervalle ne contenant pas 0, on sait que l'ensemble des solutions de $(E)$ est un espace vectoriel de dimension 2. Il est donc nécessairement engendré par $\cos(x^2)$ et $\sin(x^2)$. Considérons maintenant une solution $y$ de $(E)$ sur $\mathbb{R}$. Elle est solution sur $]0,+\infty[$, et donc il existe deux constantes $a_0$ et $a_2$ telles que

$$y(x)=a_0\cos(x^2)+a_2\sin(x^2)\text{ pour }x>0.$$

Elle est solution sur $]-\infty,0[$ et donc il existe deux constantes $b_0$ et $b_2$ telles que

$$y(x)=b_0\cos(x^2)+b_2\sin(x^2)\text{ pour }x<0.$$

D'après la question préliminaire, $y$ va se prolonger en une fonction de classe $C^2$ si et seulement si $a_0=b_0$ et $a_2=b_2$. Ainsi, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions $x\mapsto a\cos(x^2)+b\sin(x^2)$, $a,b\in\mathbb{R}$.

**Exercice 35 - Séries entières et équations différentielles - abaissement de l'ordre** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

1. On cherche une solution développable en série entière, qui s'écrit donc $y(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$. On introduit ceci dans l'équation

$$\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}2na_nx^{n-1}-\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+1}=0.$$

On réindexe la troisième somme pour retrouver une somme faisant apparaitre un terme en $x^{n-1}$. On trouve

$$\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}2na_nx^{n-1}-\sum_{n\geq 2}a_{n-2}x^{n-1}=0.$$

On en déduit $a_1=0$, puis, pour $n\geq 2$,

$$n(n+1)a_n=a_{n-2}.$$

On en déduit que, pour tout entier $p$, $a_{2p+1}=0$ alors

$$a_{2p}=\frac{a_{2p-2}}{(2p+1)2p}=\dots=\frac{a_0}{(2p+1)!}.$$

Comme la série entière $\sum_{p\geq 0}\frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$, on trouve que la fonction

$$f(x)=\sum_{p\geq 0}\frac{x^{2p}}{(2p+1)!}=\frac{\sinh(x)}{x}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation.

On résoud alors l'équation sur $]0,+\infty[$ ou sur $]-\infty,0[$ (où on sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2) par la méthode d'abaissement de l'ordre. Pour cela, on pose $y(x)=f(x)z(x)$. Sachant que $f$ est solution de l'équation, on trouve que $y$ est aussi solution si et seulement si $z$ vérifie l'équation différentielle

$$2xf'z'+xfz''+2fz'=0.$$

C'est une équation du premier ordre en $z'$, que l'on sait résoudre. Remplaçant $f$ par sa valeur, on trouve

$$2\cosh xz'+\sinh xz''=0\implies\frac{z''}{z'}=-2\frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Il vient
$$z' = \frac{\lambda}{\sinh^2 x}$$
puis
$$z = \frac{\lambda \cosh x}{\sinh x} + \mu.$$
Finalement, toute solution sur $]0, +\infty[$ s'écrit sous la forme
$$y(x) = \mu \frac{\sinh x}{x} + \lambda \text{cosh}\, x x.$$
Si on cherche maintenant les solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier, il faut procéder par recollement. Si $y$ est solution sur $\mathbb{R}$, il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ telles que
$$y(x) = \begin{cases} \mu_1 \frac{\sinh x}{x} + \lambda_1 \frac{\cosh x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \mu_2 \frac{\sinh x}{x} + \lambda_2 \frac{\cosh x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
En étudiant la limite de $\cosh x/x$ en zéro, et sachant que $y$ doit être continu en 0, on voit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. D'autre part, puisque $\sinh x/x \to 1$ en 0, la continuité de $y$ en 0 impose alors que $\mu_1 = \lim_{x \to 0^+} y(x) = \lim_{x \to 0^-} y(x) = \mu_2$. Ainsi, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \mu \frac{\sinh x}{x}$.

2. On recopie la même méthode, en posant $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Si on introduit dans l'équation, on trouve
$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n \geq 1} n a_n x^n + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0.$$
On change les indices dans la deuxième somme pour trouver :
$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n \geq 1} n(n+1)a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n \geq 1} n a_n x^n + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0.$$
Par identification, on trouve $a_0 = 0$, $a_2 = 2a_1$, puis, pour $n \geq 2$ :
$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n.$$
Ainsi, par récurrence, on trouve $a_n = n a_1$. Puisque la série entière $\sum_{n \geq 1} n x^n$ a pour rayon de convergence 1, on a prouvé que la fonction
$$f(x) = \sum_{n \geq 1} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$
est solution de l'équation sur $]-1, 1[$ (en réalité, sur $]-\infty, 1[$).
On va ensuite résoudre l'équation sur $]0, 1[$, par la méthode d'abaissement de l'ordre. Pour cela, on pose $y(x) = f(x)z(x)$. Sachant que $f$ est solution de l'équation, on trouve que $y$ est aussi solution si et seulement si $z$ vérifie l'équation différentielle
$$2x(x-1)f'z' + x(x-1)fz'' + 3xfz' = 0.$$

C'est une équation du premier ordre en $z'$, que l'on sait résoudre. Remplaçant $f$ par sa valeur, simplifiant par $x$, et après regroupement, on trouve

$$z'(x-2) = x(1-x)z''.$$

On réécrit cette équation sous la forme

$$\frac{z''}{z'} = \frac{x-2}{x(1-x)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

Ceci s'intègre en

$$z' = \lambda\frac{1-x}{x^2} = \lambda\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right).$$

On intègre encore une fois pour trouver $z$. Quitte à changer $\lambda$ en $-\lambda$, il vient :

$$z = \lambda\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) + \mu.$$

Les solutions de l'équation sur $]0,1[$ sont donc les fonctions

$$y(x) = \frac{\mu x + \lambda(1 + x\ln x)}{(1-x)^2}.$$

Si on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$, il faut au moins que la fonction ait une limite en 1. Faisons le développement limité du numérateur, en posant $x = 1-h$. Il vient

$$\begin{aligned}
N(x) &= \mu(1-h) + \lambda\big(1 + (1-h)\ln(1-h)\big)\\
&= \mu - \mu h + \lambda\big(1 + (1-h)(-h - h^2/2 + o(h^2))\big)\\
&= \mu - \mu h + \lambda\big(1 - h + h^2/2 + o(h^2)\big)\\
&= (\mu+\lambda) - (\mu+\lambda)h + \lambda h^2/2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

Puisque le dénominateur est $h^2$, la fonction admet une limite en 1 si et seulement si $\lambda = -\mu$. D'autre part, il faut que la fonction soit dérivable en 0. Mais, du fait de la présence du terme $x\ln x$, dont le taux d'accroissement en 0 tend vers $-\infty$, la fonction ne peut être dérivable que si $\lambda = 0$. Ainsi, la seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle !

**Exercice 36 - Séries entières et équations différentielles - changement de variables** - *Math Spé/L2/Agreg interne* - ⋆⋆⋆

1. Soit $y(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ une solution de l'équation développable en série entière. Alors, on a

$$2xy'' - y' + x^2 y = -a_1 + 2a_2 x + \sum_{i=2}^{+\infty}\big((i+1)(2i-1)a_{i+1} + a_{i-2}\big)x^i = 0.$$

   Par unicité du développement en série entière, on trouve $a_1 = a_2 = 0$ et la formule de récurrence

$$a_{i+1} = -\frac{1}{(i+1)(2i-1)}a_{i-2}.$$

On a donc, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $a_{3k+1}=a_{3k+2}=0$ et

$$a_{3k}=-\frac{1}{3k(6k-3)}a_{3k-3}=-\frac{1}{9k(2k-1)}a_{3k-3}.$$

Par récurrence,

$$a_{3k}=\frac{(-1)^k}{9^k k!(2k-1)\times(2k-3)\cdots\times 3\times 1}a_0=\frac{(-1)^k 2^k k!}{9^k k!(2k)!}a_0=\frac{(-1)^k 2^k}{9^k(2k)!}a_0.$$

Réciproquement, pour tout $a_0$ dans $\mathbb{R}$, la série entière

$$y(x)=a_0\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k 2^k}{9^k(2k)!}x^{3k}$$

a pour rayon de convergence $+\infty$ et est solution de l'équation différentielle.
Si on cherche maintenant à identifier à une fonction classique, le terme $\frac{x^{3k}}{(2k)!}$ nous met sur la voie. Cela ressemble au terme général de $\cos(x)$, ou plutôt de $\cos(x^{3/2})$. Comme ceci n'est défini que pour $x>0$, il faut aussi considérer $\cosh\left((-x)^{3/2}\right)$ pour $x<0$. Avec une homothétie pour obtenir $\frac{2^k}{9^k}$, on trouve finalement que

$$y(x)=\begin{cases} a_0\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) & \text{si } x\geq 0\\ a_0\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) & \text{si } x\leq 0.\end{cases}$$

2. La forme de la solution trouvée précédemment nous conduit au changement de variables $t=\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}$ pour $x>0$, c'est-à-dire à chercher l'équation différentielle vérifiée par $z(t)=y(x)$. Or,

$$y'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z'(t)$$

et

$$y''(x)=\frac{1}{2}xz''(t)+\frac{\sqrt{2}}{4x^{1/2}}z'(t).$$

On trouve donc

$$2xy''-y'+x^2y=x^2z''+\frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z'-\frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z'+x^2z=0.$$

$z$ vérifie donc l'équation différentielle $z''+z=0$, et donc $z=\lambda\cos(t)+\mu\sin(t)$ pour $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Autrement dit, la solution générale de $(E)$ sur $]0,+\infty[$ est donnée par :

$$y(x)=\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)+\mu\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

Pour résoudre l'équation sur $]-\infty,0[$, on pose cette fois $t=\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}$. La fonction $z(t)=y(x)$ vérifie l'équation différentielle $z''-z=0$, et donc la solution générale sur $]-\infty,0[$ est donnée par

$$y(x)=\lambda'\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)+\mu'\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

3. Soit $y$ une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, on sait qu'il existe des constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) \text{ pour } x > 0 \\ \lambda' \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) + \mu' \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) \text{ pour } x < 0. \end{cases}$$

Comme $y$ est continue en 0 et que $\lim_{0^+} y = \lambda$ alors que $\lim_{0^-} y = \lambda'$, on en déduit que $\lambda = \lambda'$. D'autre part, pour $x > 0$, on note $y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$. On a

$$y_2''(x) = \left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)\right)'' = -\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4x^{1/2}}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

Pour $x \to 0$, ceci tend vers $+\infty$. Or, puisqu'une solution de $(E)$ est de classe $C^2$, on sait que $y''(x)$ admet une limite (finie) quand $x$ tend vers 0, et que $y_1$ se prolonge en fonction $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\lim_0 y_1''$ existe (et est finie). Puisque $\lim_{0^+} y'' = \lambda \lim_{0^+} y_1'' + \mu \lim_{0^+} y_2''$, ceci ne peut être fini que si $\mu = 0$. De même, on trovue que $\mu' = 0$. Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E)$ sont donc celles données par la première question.